ELT- 3832 SOLUCION PRACTICA N°1

1. Dibujar con detalle el L.G.l.R para $K \geq 0$ de la siguiente funcion de transferencia de lazo abierto.

$$GH(s) = \frac{K(s+5)}{(s+7)(s^2+7s+9)}$$

Solución:

El L.G.l.R es un metodo para determinar en forma grafica pos polos del sistema realimentado

Se parte de la funcion de lazo abierto GH(s)

$$GH(s) = \frac{K(s+5)}{(s+7)(s^2+7s+9)} = \frac{K(s+5)}{(s+7)(s+5.3)(s+1.697)}$$

1ro- Asintotas:

$$\theta i = \frac{2i+1}{|n-m|} * 180 \qquad n = polos, \quad m = ceros, \quad i = 0,1,2,3, \dots\dots |n-m| - 1$$

$$\theta o = \frac{1}{|3-1|} * 180 = 90º$$

$$\theta 1 = \frac{3}{|3-1|} * 180 = 270º \qquad n = 3, \quad m = 1, \quad i = 0,1$$

2ro- Centroide

$$\sigma = \frac{\sum polos - \sum ceros}{n-m} = \frac{-7-5.3-1.697+5}{2} = \frac{-9}{2} = -4.5$$

3ro- Angulos de salida:

Para $\theta 1$

$$\sum \theta ceros - \sum \theta polos = -180 \rightarrow \theta p1 = 0º$$

Para $\theta 2$

$$\sum \theta ceros - \sum \theta polos = -180 \rightarrow \theta p2 = 180º$$

Para $\theta 3$

$$\sum \theta ceros - \sum \theta polos = -180 \rightarrow \theta p3 = 180º$$

4to- Puntos de ruptura:

1 + KGH(s) = 0 Ec. Caracteristica

$$K = -\frac{1}{GH(s)} \rightarrow \frac{dK}{ds} = 0$$

$$K = -\frac{(s+7)(s^2+7s+9)}{s+5} = \frac{s^3+14s^2+58s+63}{s+5}$$

$$\frac{dK}{ds} = \frac{(3s^2+28s+58)(s+5)-(s^3+14s^2+58s+63)}{(s+5)^2} = \frac{2s^3+29s+56s+227}{(s+5)^2} = 0$$

$$2s^3+29s^2+56s+227 = 0$$

$s_1 = -13.01$

$$s_{2,3} = -0.74 \pm j2.85$$

Para el L.G.l.R (K≥0) no existen puntos de ruptura, la ganacia K para -13.01 es menor a cero.

5[to]- Corte con el eje imaginario:

1 + KGH(s) = 0   Ec. Caracteristica

$$1+\frac{K(s+5)}{(s+7)(s+5.3)(s+1.697)}=0 \rightarrow \quad (s+7)(s+5.3)(s+1.697)+K(s+5)=0$$

$$s^3+14s^2+58s+63+Ks+5K=0 \quad \rightarrow \quad s^3+14s^2+(58+K)s+63+5K=0$$

s = jw;

$$-jw^3-14w^2+(58+K)jw+63+5K=0 \quad \rightarrow \quad (63+5K-14w^2)+j[(58+K)w-jw^3]$$

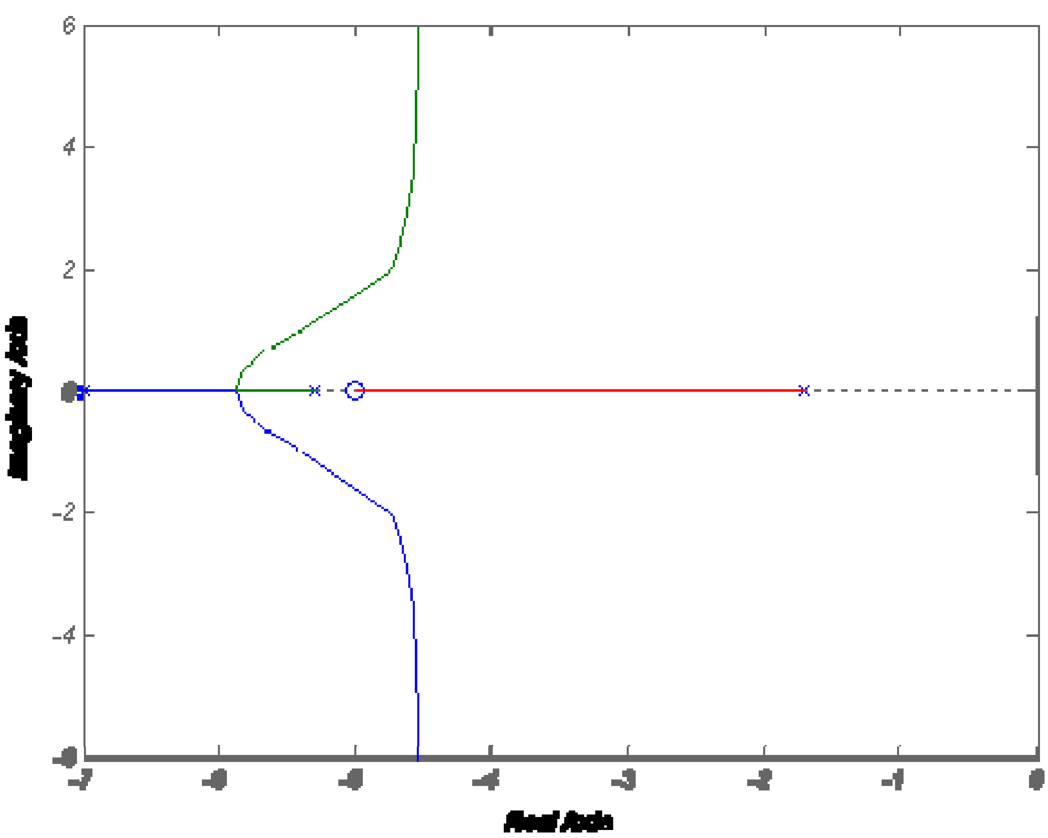
$$(63+5K-14w^2)=0$$

$$[(58+K)w-w^3]=0$$

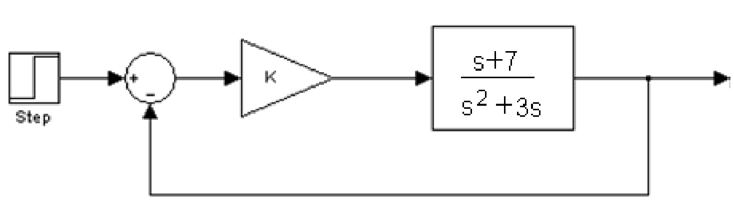
$$K=-\frac{749}{9}$$

$$w^2=58-\frac{749}{9}=-\frac{227}{9} \qquad \textit{No corta con el eje imaginario}$$

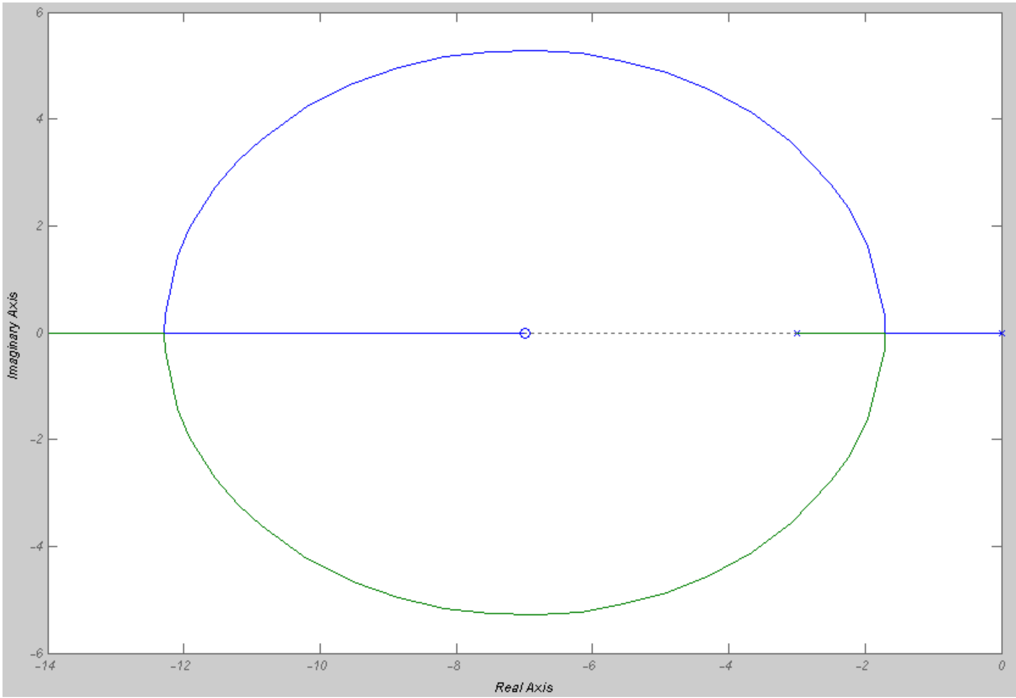
El L.G.l.R del sistema sera:



2. Para el sistema:



a) Dibujar el L.G.l.R para K>=0



b) Elegir K de forma que el sobrepico ante entrada escalon unitario sea 10% o menos.

$$Mp = e^{\frac{-\pi}{\tan\theta}} \quad \Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}\left[\frac{-\pi}{\ln Mp}\right]$$

$$\theta = \tan^{-1}\left[\frac{-\pi}{\ln 0.047}\right] \approx 45^{\circ} \quad \rightarrow \quad \cos\theta = 0.707$$

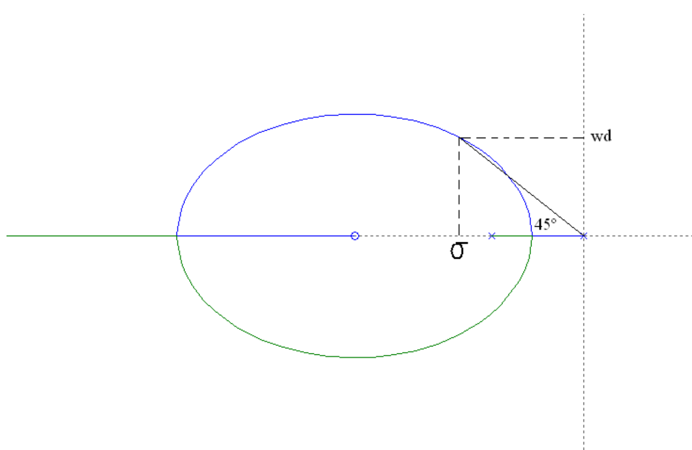
Los polos dominantes se encuentran localizados en.

$$P_{1,2} = \sigma \pm j\omega d$$

Donde:

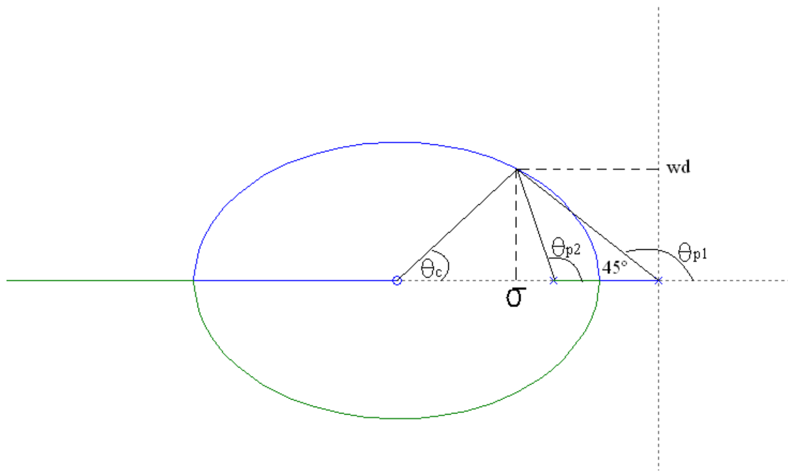
$$\tan\theta = \frac{\omega d}{\sigma} \qquad \rightarrow \omega d = \sigma \tan\theta$$

Como Θ =45º entonces: $\omega d = \sigma$



Para hallar los valores de ωd y σ se aplica la condición de ángulo:

$$\sum \theta ceros - \sum \theta polos = -180^{\circ}$$



$$\theta c - [\theta p1 + \theta p2] = -180^{\circ}$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{\omega d}{7-\sigma}\right) - \left[180^{\circ} - \tan^{-1}\left(\frac{\omega d}{\sigma}\right) + 180^{\circ} - \tan^{-1}\left(\frac{\omega d}{\sigma - 3}\right)\right] = 180^{\circ}$$

$$\omega d = \sigma = x$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{x}{7-x}\right) - \left[180^{\circ} - \tan^{-1}\left(\frac{x}{x}\right) + 180^{\circ} - \tan^{-1}\left(\frac{x}{x-3}\right)\right] = 180^{\circ}$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{x}{7-x}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x}{x-3}\right) = 135^{\circ}$$

Resolviendo la ecuación x = 4.823

Entonces:

$$\omega d = \sigma = 4.823$$

Los polos dominantes deseados están:

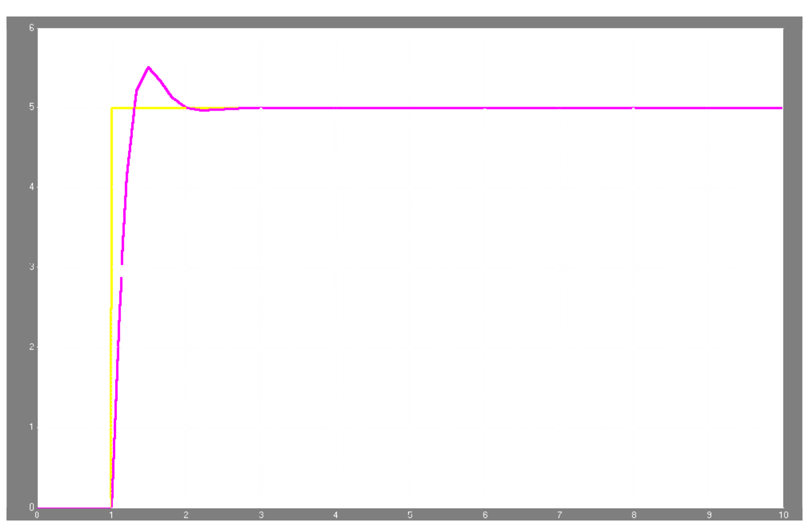
$$P_{1,2} = -4.823 \pm j4.823$$

Finalmente para hallar el valor de K se aplica la condición de magnitud:

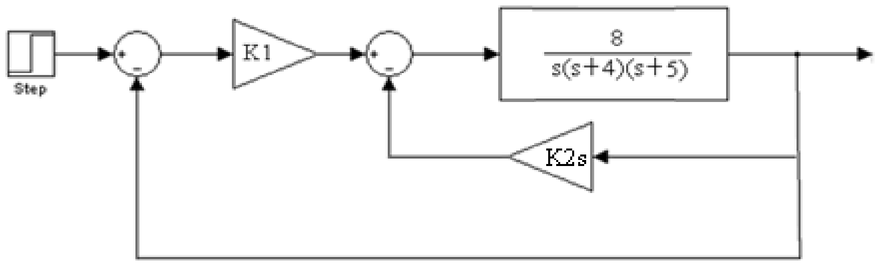
$$K = \frac{dp1 * dp2 * dp3 * \ldots\ldots dpn}{dc1 * dc2 * dc3 * \ldots\ldots dcn}$$

$$K = \frac{\sqrt{4.823^2 + 4.823^2} * \sqrt{4.823^2 + (4.823-3)^2}}{\sqrt{4.823^2 + (7-4.823)^2}} = 5.175$$

La respuesta del sistema de lazo cerrado ante entrada escalón:



3. Para el sistema mostrado en la figura, determine el valor de K_1 y K_2 de tal forma que los polos de lazo cerrado sean: $s = -4 \pm j4$



Solución:

Lazo interno:

$$G'(s) = \frac{8K_1}{s(s+4)(s+5) + 8K_2\, s}$$

La funcion total resultante de lazo abierto GH(s) es:

$$GH(s) = \frac{8}{s(s+4)(s+5) + 8K_2\, s}$$

La ecuacion caracteristica del sistema es:

1+ GH(s) = 0

$$1 + GH(s) = \frac{8}{s(s+4)(s+5) + 8K_2\, s}$$

$$s(s+4)(s+5) + 8K_2 s + 8K_1 = 0$$

$$s(s+4)(s+5) + 8K_2\left[s + \frac{K_1}{K_2}\right] = 0$$

Reordenando

$$1 + \frac{8K_2\left[s + \frac{K_1}{K_2}\right]}{s(s+4)(s+5)} = 0$$

$$GH(s) = \frac{K(s+a)}{s(s+4)(s+5)}$$

Los polos de lazo cerrado se ubican en: $s = -4 \mp j4$

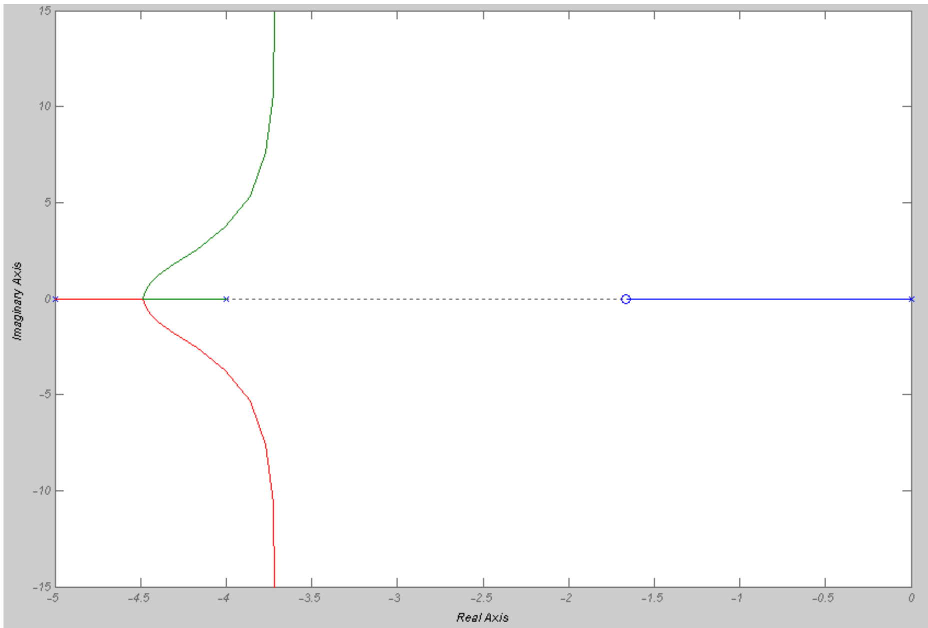
Aplicando la condición de ángulo:

$$\sum \theta ceros - \sum \theta polos = -180° \quad \rightarrow \quad \theta c1 - (\theta p1 + \theta p2 + \theta p3) = -180°$$

$$\tan^{-1}\frac{4}{a-4} - \left[135 + 90 + \tan^{-1}\frac{4}{1}\right] = -180°$$

$$a = 1.666$$

El LGR resultante:



Por la condicion de magnitud.

$$K = \frac{4 * \sqrt{4^2 + 4^2}\sqrt{4^2 + 1}}{\sqrt{4^2 + 2.34^2}} = 20.13$$

Finalmente .

$$K = 8K_2 = 8 \quad \rightarrow \quad K_2 = 2.51$$

$$a = \frac{K_1}{K_2} = 1.666 \quad \rightarrow \quad K_1 = 4.19$$

4. Para el siguiente sistema, despreciando la dinámica menos relevante sintonizar un controlador PID mediante el L.G.R. de modo que se obtenga: error de estado estacionario cero, tiempo de establecimiento menor o igual a 1 seg y un sobrepico igual al 4.3% la entrada se supone escalón.

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+30)}$$

Solución:

Al despreciar la dinámica menos relevante, el polo más alejado al origen (constante de tiempo mas pequeña) queda anulado y el sistema queda como un sistema ideal de segundo orden.

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+30)} = \frac{0.01666}{s(0.5s+1)(0.03s+1)}$$

Entonces:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

Calculo de los polos dominantes:

Mp = 4.3%

ts = 1 seg

entonces los polos dominantes de lazo cerrado requerimientos quedan en:

$$Mp = e^{\frac{-\pi}{\tan\theta}} \quad \Longrightarrow \quad \theta = \tan^{-1}\left[\frac{-\pi}{\ln Mp}\right]$$

$$\theta = \tan^{-1}\left[\frac{-\pi}{\ln 0.043}\right] \approx 45° \quad \rightarrow \quad \cos\theta = 0.707$$

$$ts = \frac{4}{\sigma} \quad (criterio\ 2\%)$$

$$\sigma = 4$$

$$\tan\theta = \frac{\omega d}{\sigma} \quad \rightarrow \quad \omega d = \sigma$$

$P_{1,2} = -4 \pm j4$

El controlador PID en forma paralela: $G_c(s) = Kp + {}^{Ki}/_{s} + Kds$

En forma de polos y ceros: $$G_c(s) = \frac{Kc(s+a)(s+b)}{s}$$

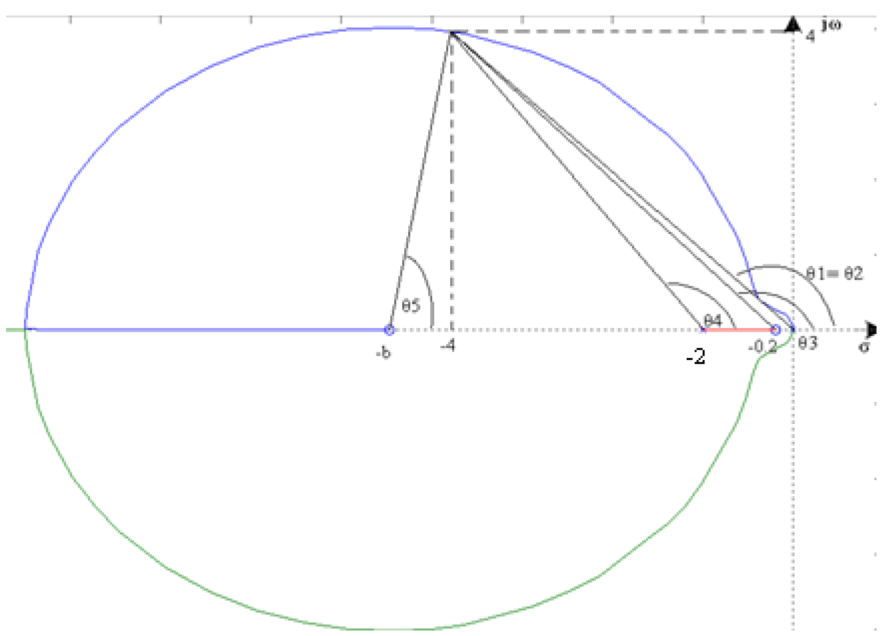
Donde:

El cero en –a debe anular los efectos dinámicos que introduce el polo en el origen del controlador a veces puede ser aproximado por $a \approx {}^{\sigma}/_{6}$

$a \approx {}^{-4}/_{6} = 0.667$

Pero en este caso asumimos $a = -0.2$ por conveniencia

El lugar geométrico de las raíces será entonces:



El cero en –b se calcula aplicando la condición de ángulo:

$$\sum \theta ceros - \sum \theta polos = -180° \quad \rightarrow \quad \theta c1 + \theta c2 - (\theta p1 + \theta p2 + \theta p3) = -180°$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{4}{b-4}\right) + 180 - \tan^{-1}\left(\frac{4}{4-0.2}\right) - \left[2 * 135 + 180 - \tan^{-1}\left(\frac{4}{2}\right)\right] = -180°$$

$$b = 5.222$$

La ganacia Kc se calcula aplicando la condicion de magnitud:

$$K = \frac{(4^2+4^2)\sqrt{4^2+2^2}}{\sqrt{4^2+(4-0.2)^2}\sqrt{4^2+1.222^2}} = 6.62$$

$$Kc = 6.62$$

5. Para el sistema anterior, mediante las regals de Ziegler-Nichols, sintonizar un controlador PID

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+10)}$$

Calcular ademas: sobrepico y tiempo de establecimiento ante entrada escalon:

Solución:

Aplicando el metodo de las oscilaciones se procede a calcular la ganacia critica K_{cr} y el periodo de oscilacion P_{osc}.

$$1 + K_{cr}G(s) = 0$$

$$1 + \frac{K_{cr}}{s(s+2)(s+30)} = 0$$

$$s(s+2)(s+30) + K_{cr} = 0$$

$$s^3 + 32s^2 + 60s + K_{cr} = 0 \qquad si \quad s = j\omega$$

$$-j\omega^3 - 32\omega^2 + 60j\omega + K_{cr} = 0$$

$$-32\omega^2 + K_{cr} + j\omega(60 - \omega^2) = 0$$

$$\begin{cases} -32\omega^2 + K_{cr} = 0 \\ j\omega(60 - \omega^2) = 0 \end{cases}$$

$$\omega = \sqrt{60}$$

$$T_{osc} = P_{osc} = \frac{2\pi}{\sqrt{60}} = 0.8111$$

$$K_{cr} = 1920$$

Entonces:

$$Kp = 0.6 * K_{cr} = 0.6 * 1920 = 1152$$

$$Ti = 0.5 * P_{osc} = 0.5 * 0.8111 = 0.4056$$

$$Td = 0.125 * P_{osc} = 0.125 * 0.811 = 0.1014$$

O de otra forma:

$$G(s) - 0.075\, K_{cr} * P_{osc} \frac{(s + {}^{4}/_{P_{osc}})^2}{s} - 116.8 \frac{(s + 4.932)^2}{s}$$

Para calcular su desempeño temporal (sobrepico, tiempo de establecimiento ante entrada escalon), se deebn calcular los polos dominantes del sistema en lazo cerrado.

Aplicamos la ecuacion caracteristica del sistema:

$$1 + G_c(s) * G(s) = 0$$

$$1 + 116.8 \frac{(s + 4.932)^2}{s^2(s+2)(s+30)} = 0$$

$$s^2(s+2)(s+30) + 116.8(s + 4.932)^2 = 0$$

$$s^4 + 32s^3 + 60s^2 + 116.8s^2 + 1152.12s + 2841.11 = 0$$

$$s^4 + 32s^3 + 176.8s^2 + 1152.12s + 2841.11 = 0$$

$$(s + 26.87)(s + 3.23)(s + 0.9533 - j5.647)(s + 0.9533 + j5.647) = 0$$

Los polos dominantes son los mas cercanos al origen:

$P_{1,2} = -0.9533 \pm j5.647$

$$\sigma = 0.9533$$

$$\omega d = 5.647$$

$$\tan\theta = \left[\frac{5.647}{0.9533}\right] = 5.924$$

$$\theta = 80.42^{\circ}$$

$$\xi = \cos\theta = 0.166$$

$$Sobrepico: \quad Mp = e^{\frac{-\pi}{\tan\theta}} = e^{\frac{-\pi}{5.924}} = 0. = 58.84\%$$

$$Tiempo\ pico: \quad t_p = \frac{\pi}{\omega d} = \frac{\pi}{5.647} = 0.56\ seg$$

$$Tiempo\ de\ establecimiento: t_s = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{0.} = 4.196\ seg$$

6. Para el proceso cuya función de transferencia es:

$$G(s) = \frac{1.38947}{s^2 + 2.67855.s + 1.28672}$$

Diseñar un controlador PID mediante el L.G.R. de modo que se obtenga: tiempo de establecimiento menor o igual a 2 seg y un sobrepico igual al 4.3% la entrada se supone escalón.

$$\theta = arctg\left(-\frac{\pi}{LnMP}\right)$$

$$\theta = 38{,}7666$$

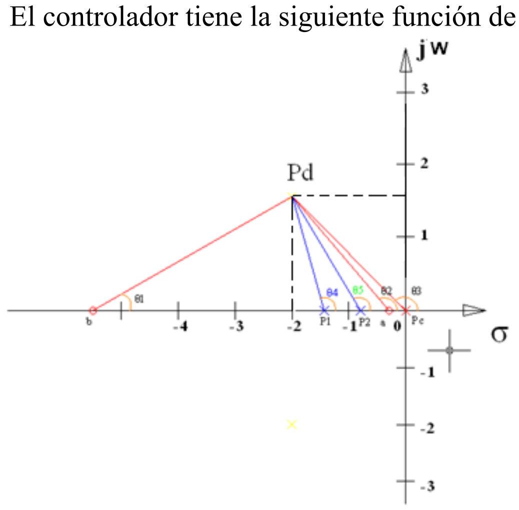
Se tiene que:

$\sigma = 4/ts = 4/2$
$\sigma = 2$
$\omega d = \sigma * tg\theta = 2\ tg(38.7666)$
$\omega d = 1\ .6061 \quad (rad/seg)$

Con los parámetros de diseño ya mencionados los polos dominantes deseados de lazo cerrado son:

$P_{1,2} = 2 \pm j1.6061$

El controlador tiene la siguiente función de transferencia:



$$G_C(s) = \frac{K_C(s+a)(s+b)}{s}$$

El valor del cero b se calcula aplicando la condición de ángulo:

$\Sigma\theta_{ceros} - \Sigma\theta_{polos} = -180$

$$\left[180 - tg^{-1}\left(\frac{1.6061}{2-0.3}\right) + tg^{-1}\left(\frac{1.6061}{b-2}\right)\right] - \left[180 - tg^{-1}\left(\frac{1.6061}{2}\right) + 180 - tg^{-1}\left(\frac{1.6061}{2-0.627}\right) + 180 - tg^{-1}\left(\frac{1.6061}{2-0.3127}\right)\right] = -180$$

[136.6269 + θzb] - [-38.7662 + 130.52 + 88.1716]=0

$\theta zb = 43.2985$

$b = 3.7044$

Utilizando la condición de magnitud de hallamos K_{RL}:

$$K_{RL} = \frac{dp1*dp2*dp3}{dc1*dc2*dc3}$$

$K_{RL} = 1.59$

Hallamos la ganancia del controlador

$$K_C = \frac{K_{RL}}{K} = \frac{1.59}{1.3897}$$

$Kc = 1.1443$

Finalmente tenemos la función de transferencia del controlandor PID:

$$Gc\,(s) = \frac{1.1443(s+0.3)\,(s+3.7044)}{s}$$

La figura del lugar geométrico de las raíces del sistema, mostrando los polos de lazo cerrado para la ganancia calculada es el siguiente:

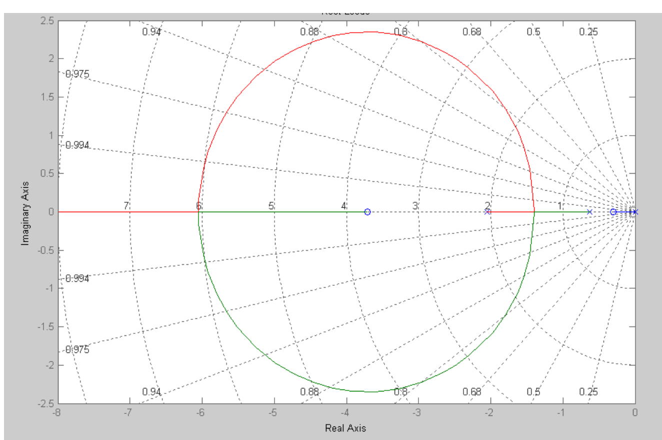


Figura 5.2 lugar geométrico de las raíces del sistema.

La función de transferencia de lazo cerrado, expresada en forma de polos y ceros es:

$$GLC(s) = \frac{1.589(s+0.3)(s+3.7044)}{(s+0.253)(s+1.78+j1.35)(s+1.78-j1.35)}$$

El cero en *-0.3* prácticamente anula al polo en *-0.253*, quedando como polos dominantes los complejos conjugados.

Utilizando la función de transferencia del controlador, se calcula los parámetros en su forma paralela:

$K_P = K_C\,(a+b) = 4.5822$
$K_I = K_C * a * b = 1.2717$
$K_D = K_C = 1.1443$

Y los parámetros en forma standard son:

$K_P = 4.5822$
$T_i = K_P/K_I = 3.6032$
$T_d = K_D/K_P = 0.2497$

7. **Para el sistema anterior, mediante las regals de Ziegler-Nichols, sintonizar un controlador PID**

Aplicamos el método de la respuesta del sistema ante entrada escalón:

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1.38947}{(s+0.62728)(s+2.05127)}$$

$$R(s) = \frac{A}{s}$$

Asumimos A = 1:

$$C(s) = \frac{1.38947}{s(s+0.62720)(s+2.05127)}$$

De donde:

$$C(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+0.62728)} + \frac{C}{(s+2.05127)}$$

Calculo de A:

$$A = \frac{1.38947}{(s+0.62728)(s+2.05127)} = 1.07985$$

Calculo de B:

$$B = \frac{1.38947}{s(s+2.05127)} = -1.55554$$

Calculo de C:

$$C = \frac{1.38947}{s(s+0.62728)} = 0.4757$$

Por lo tanto C(s) es :

$$C(s) = \frac{1.07985}{s} - \frac{1.55554}{(s+0.62728)} + \frac{0.4757}{(s+2.05127)}$$

Llevando a constantes de tiempo se tiene:

$$c(t) = 1.07985 - 1.55554e^{-0.62728t} + 0.4757e^{-2.05127t}$$

Hallamos la primera derivada:

$$c'(t) = 0.97576e^{-0.62728t} \quad 0.97576e^{-2.05127t}$$

Hallamos la segunda derivada:

$$c''(t) = -0.6121e^{-0.62728t} + 2.0015e^{-2.05127t}$$

$$c''(t)_t = 0 = -0.6121e^{-0.62728to} + 2.0015e^{-2.05127to}$$

to = 0.832

$$c'(to) = 0.97576e^{-0.62728 \cdot 0.832} - 0.97576e^{-2.05127 \cdot 0.832}$$

$c'(to) = 0.4019 = m$

$c(to) = 1.07985 - 1.55554e^{-0.62728*0.832} + 0.4757e^{-2.08127*0.832}$

$c(to) = 0.243$

La ecuación de la recta es: $y - c(to) = m * (t - to)$

$y(t) - 0.243 = 0.4019(t - 0.832)$

$y = 0.4019t - 0.0914$

Si: $t=L$; $y(t) = 0$

$y(t) = 0.4019L - 0.0914 = 0$

$L = 0.2274$

Si: $t = L+T$; $y(t) = A = 1$

$y(t) = 0.4019(L+T) - 0.0914 = 1$

$T = 2.4882$

Entonces:

$KP = 1.2\ T/L = 1.2 * 2.4882/0.2274$;

$K_P = 13.13$

$Ti = 2L = 2*0.2274$;

$T_i = 0.4548$

$Td = 0.5L = 0.5 *0.2274$

$T_d = 0.1137$